



## Construction d'une famille finie de graphes de Ramanujan

Kapita Manzanza Jean<sup>ab</sup>, Nestor Anzola Kibamba<sup>ab</sup>, Biaba Kuya Jirince<sup>a,b,c</sup>, Pongo Ngentshi Benoît<sup>a,b</sup>,  
Nawej Kayij Emile<sup>ab</sup>

<sup>a</sup> University of Kinshasa (UNIKIN), Democratic Republic of Congo.

<sup>b</sup> Faculty of Science and Technology, B.P. 190 Kinshasa XI, University of Kinshasa (UNIKIN), Democratic Republic of Congo.

<sup>c</sup> Institut Francophone International (IFI)/ Vietnam National University Hanoi, adresse 144 Xuan Thuy, Cau Giay, Hanoi, Vietnam.

**Abstract:** In this article, we intuitively define and introduce Ramanujan graphs. We focus on notable Ramanujan graphs known as sum graphs, characterized by specific properties related to eigenvalues. Indeed, studying these eigenvalues allows us to determine the spectrum of a Ramanujan graph, which is defined as the minimum of the difference between  $k$  and the absolute value (other than  $k$ ) of an eigenvalue of a  $k$ -regular Ramanujan graph. This spectrum is as large as possible. For a graph to be Ramanujan, it is necessary and sufficient to study its eigenvalues, and eventually, to construct a finite family of Ramanujan graphs.

**Keywords:** Graphe de Ramanujan, trou spectral, graphes somme, graphes de Cayley, théorie de Galois, valeurs propres, groupes abéliens, extension galoisienne. Groupe de Lie, représentation d'un Groupe.

**Digital Object Identifier (DOI):** <https://doi.org/10.5281/zenodo.14217522>

### 1 Introduction

Un graphe est la donnée d'une structure de données qui permet de modéliser les réseaux, les systèmes de communication; etc.

On peut même le définir comme étant un ensemble d'objets ou nœuds et des liens entre ces derniers.

La théorie des graphes a vu le jour au 18<sup>ème</sup> siècle (1735) par Le Mathématicien Suisse Leonard Euler grâce à ses travaux scientifiques sur le problème de 7 ponts dans la ville de Königsberg en Allemagne. Et le problème de 7 ponts consistait à partir d'un point  $x$  de la ville vers un autre point  $y$  et  $y$  revenir, en traversant une fois ces ponts, cad:

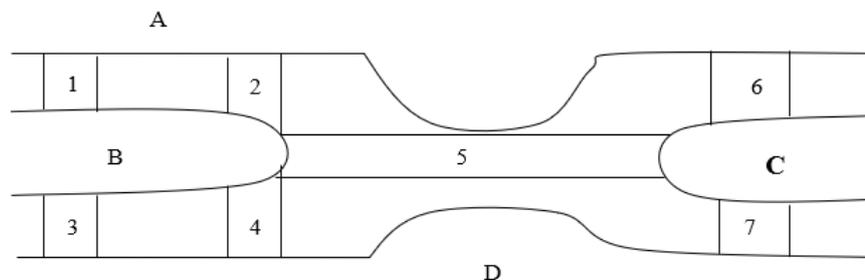


Figure 1. 7 ponts

Et le graphe associé à ces bras de rivière était représenté comme suit:

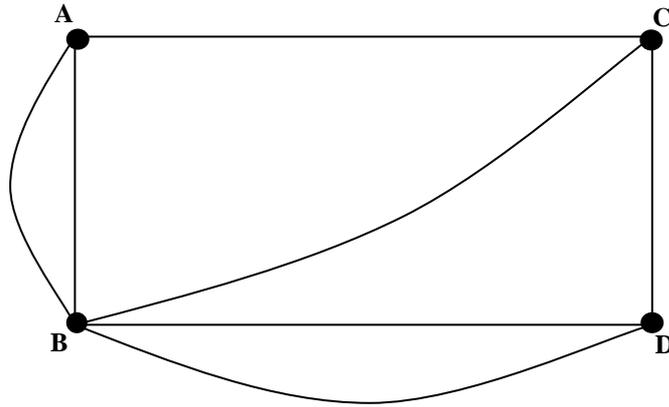


Figure 2. Graphe associé

Par ailleurs, à chaque graphe peut être associée une matrice dite d'adjacence et à chaque matrice on peut associer un graphe.

D'où on pourra ramener l'étude du graphe à celle des valeurs propres de sa matrice d'adjacence et l'ensemble de ces valeurs propres constituera le spectre du graphe.

D'une manière générale, l'objectif de ce travail reste focaliser sur l'étude d'un tel spectre.

Et pour y arriver, on va étudier dans un premier temps les concepts de base pour définir un graphe en mettant l'accent particulier sur les graphes de Cayley, et dans un second temps, nous définirons les graphes de Ramanujan comme étant un graphe caractérisé par la différence entre ses deux plus grandes valeurs propres distinctes en module.

- Exemple : considerons un graphe ayant comme valeurs propres  $\lambda_1 = -6$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = 1$  et  $\lambda_4 = 6$ , on aura une différence  $d = |\lambda_1 - \lambda_4| = 12$  qui est aussi plus grande que possible.
- Exemple pour un graphe ayant comme valeurs propres  $\lambda_1 = -5 - 3i$ ,  $\lambda_2 = 4 + i$ ,  $\lambda_3 = 2 + i$  et  $\lambda_4 = 5 + 3i$ , on aura une différence  $d = |\lambda_1 - \lambda_4| = \sqrt{136}$  qui est aussi plus grande que possible.

L'objectif principal ici est de construire une famille finie de graphes de Ramanujan à l'aide des graphes de Cayley et de la théorie de Galois.

## 2 Une esquisse sur les graphes [16] [17] [18]

De façon plus formelle, un graphe est défini par un couple  $\mathcal{G} = (S, A)$  tel que

- $S$  est un ensemble fini de sommets,
- $A$  est un ensemble de couples de sommets  $(s_i, s_j) \in S$ .

Un graphe peut être orienté ou non:

- Dans un graphe orienté, les couples  $(s_i, s_j) \in A$  sont orientés, c'est à dire que  $(s_i, s_j)$  est un couple ordonné, où  $s_i$  est le sommet initial, et  $s_j$  le sommet terminal. Un couple  $(s_i, s_j)$  est appelé un arc.
- Dans un graphe non orienté, les couples  $(s_i, s_j) \in A$  ne sont pas orientés, c'est à dire que  $(s_i, s_j)$  est équivalent à  $(s_j, s_i)$ . Une paire  $(s_i, s_j)$  est appelée une arête.

Tout graphe d'ordre  $n$  peut être représenté par une matrice d'adjacence associée celle-ci pouvant être booléenne.

Soit  $M(m_{ij})$  la matrice d'ordre  $n$  associée à un graphe  $G = (X, U)$  d'ordre  $n$ . L'élément  $m_{ij}$  de cette matrice traduit l'existence de l'arête  $(x_i, x_j)$  du graphe.

$$M(m_{ij}) \text{ est booléenne si : } m_{ij} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \Leftrightarrow (x_i, x_j) \notin U \end{cases}$$

La matrice d'adjacence d'un graphe est très intéressante, car elle représente une source inépuisable d'informations. En effet, plusieurs propriétés de graphe peuvent être retrouvées à partir de sa matrice d'adjacence.

**2.1 Proposition 2.1**

Soient  $\mathcal{G} = (X, U)$  un graphe fini et  $M(m_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$  sa matrice d'adjacence. Alors

$$|U| = \sum_{0 \leq i, j \leq n} m_{ij} \tag{1}$$

**2.2 Proposition 2.2**

Soient  $\mathcal{G} = (X, U)$  graphe fini. Sa matrice d'adjacence est symétrique si et seulement si  $\mathcal{G}$  est non orienté.

**2.3 Proposition 2.3**

- Un graphe  $\mathcal{G} = (X, U)$  est  $k$ -régulier ( $k \geq 1$ ) si pour tout nœud  $x \in X$ , on a  $d^+(x) = d^-(x) = k$
- Un graphe  $\mathcal{G} = (X, U)$  est  $k$ -régulier ( $k \geq 1$ ) sur  $n$  nœuds et  $M(m_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$  sa matrice d'adjacence. Alors

$$\sum_{1 \leq j \leq n} m_{ij} = k \quad \forall 1 \leq i \leq n \tag{2}$$

$$\sum_{1 \leq i \leq n} m_{ij} = k \quad \forall 1 \leq j \leq n \tag{3}$$

**2.4 Définition 2.1**

Soient le graphe fini  $\mathcal{G} = (X, U)$  et  $a \in \mathbb{R}$ .  $a$  est une valeur propre de  $\mathcal{G}$  si et seulement si  $a$  est une valeur propre de sa matrice d'adjacence.

Le spectre de  $\mathcal{G}$  est l'ensemble de ses valeurs propres.

**2.5 Proposition 2.4**

Soit  $\mathcal{G} = (X, U)$  un graphe  $k$ -régulier ( $k \geq 1$ ) sur  $n$  nœuds. Alors  $k$  est une valeur propre de  $\mathcal{G}$  et pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $\mathcal{G}$  telle que  $|\lambda| \leq k$ .

**3 Graphes de Cayley [3] [6]**

**3.1 Définitions, exemples et propriétés**

Les graphes de Cayley sont définis à partir d'un groupe et encodent la structure de celui-ci. Tous les groupes considérés ici seront notés additivement.

**3.1.1 Définition 3.1**

Soient  $G$  un groupe et  $S \subseteq G$  une partie de  $G$ . Le graphe de Cayley  $C(G, S)$  est défini de la manière suivante :

1. Le groupe  $G$  est l'ensemble des nœuds.
2. Une arête est un couple de nœuds du type  $(x, x + s)$  où  $x \in G, s \in S$ . ainsi,
 
$$E = \{(x, x + s) | x \in G, s \in S\}$$
3. La fonction d'incidence  $\varphi$  est l'inclusion  $E \subseteq G \times G$ . ainsi,

$$\varphi : E \rightarrow G \times G, (x, x + s) \mapsto (x, x + s).$$

L'ensemble des nœuds d'un graphe de Cayley  $C(G, S)$  sera trivialement noté  $G$ .

**3.1.2 Exemple**

voici un exemple de graphe de Cayley défini à partir du groupe abélien  $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$  et de l'ensemble  $S = \{1, 2\}$  :

1)  $G = \mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$  et  $S = \{2, 3\}$

$E = \{(0, 0, +2), (0, 0, +3), (1, 1, +2), (1, 1, +3), (2, 2, +2), (2, 2, +3), (3, 3, +2), (3, 3, +3)\}$   
 $E = \{(0, 2), (0, 3), (1, 3), (1, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$

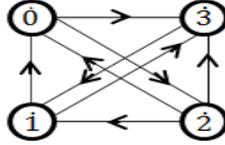


Figure 3. Exemple d'un graphe de Cayley

2)  $G = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$  et  $S = \{1, 2\}$

$E = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), (1, 0), (2, 0), (2, 1)\}$

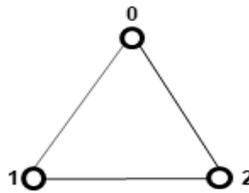


Figure 4. Exemple d'un graphe de Cayley

3.1.3 Proposition 3.1

Soient  $G$  un groupe et  $S \subseteq G$  une partie de  $G$ . le graphe de Cayley  $C(G, S)$  est  $|S|$ -régulier.

Démonstration.

Soit  $g \in G$  un nœud du graphe.

$$|\{y \in E | 0(y) = g\}| = |\{(g, g + s) | s \in S\}| = |S| \tag{4}$$

De plus,

$$|\{y \in E | t(y) = g\}| = |\{(g - s, g) | s \in S\}| = |S| \tag{5}$$

La  $|S|$ -régularité du graphe de Cayley est ainsi vérifiée.

3.1.4 Proposition 3.2

soient  $G$  un groupe et  $S \subseteq G$  une partie de  $G$ . nous considérons le graphe de Cayley  $C(G, S)$ . Alors pour tout couple de nœuds  $P_1, P_2 \in G$ , il existe au plus une arête  $y \in E$  telle que

$$\varphi(y) = (P_1, P_2). \tag{6}$$

Démonstration.

Soient  $P_1, P_2 \in G$  deux nœuds quelconques.

- Cas 1:  $P_1 = P_2 = P$ . si  $y \in E$  est une boucle en  $P$ , alors il existe un élément  $s \in S$  tel que  $P + s = P$ . ceci n'est possible que si  $s=0$ .
- Cas 2:  $P_1 \neq P_2$ . Supposons avoir deux arêtes  $y_1, y_2 \in E$  telles que:

$$0(y_1)=0(y_2)=P_1 \text{ et } t(y_1)=t(y_2)=P_2 \tag{7}$$

La définition d'un graphe de Cayley fournit deux éléments  $k_1, k_2 \in S$  tels que :

$$P_2 = P_1 + k_1 \text{ et } P_2 = P_1 + k_2 \tag{8}$$

Ceci n'est possible que si  $k_1=k_2$ . Par conséquent,  $y_1 = y_2$ .

**3.1.5 Corollaire 3.1**

Tout graphe de Carley non-orienté est simplement non-orienté. L'orientation d'un graphe de Cayley  $C(G, S)$  et la structure de la partie  $S$  sont intimement liées. Le résultat suivant le montre.

**3.1.6 Définition 3.2**

Soient  $G$  un groupe et  $S \subseteq G$  une partie de  $G$ . le sous-ensemble  $S$  est symétrique si pour tout élément  $s \in S$ , son opposé se trouve également dans  $S$ .

**3.1.7 Proposition 3.3**

Soit  $\Gamma = C(G, S)$  un graphe de Cayley.  $\Gamma$  est simplement non-orienté si et seulement si  $S$  est symétrique.

**Démonstration.**

( $\Leftarrow$ ) soit  $y := (x, x + s) \in E$  une arête du graphe. Il faut prouver qu'il existe une et une seule arête  $\bar{y} \in E$  telle que

$$(0(y), t(y)) = (t(\bar{y}), 0(\bar{y})). \tag{9}$$

Comme  $S$  est symétrique, le couple  $(x+s,x)$  est bien une arête du graphe et elle satisfait la condition. Par la proposition 3.2, nous savons qu'une telle arête est unique.

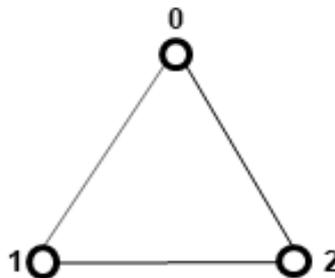
( $\Rightarrow$ ) soit  $s \in S$ . si  $s = 0$ , il n'y a rien à prouver. Nous supposons donc  $s \neq 0$ . Il faut montrer que  $-s \in S$ . pour cela considérons l'arête  $y := (x, x + s) \in E$ , avec  $x \in G$  quelconque. Comme le graphe  $C(G, S)$  est simplement non-orienté, il existe une unique flèche  $\bar{y} := (z, z + s'), z \in G, s' \in S$  telle que

$$\begin{cases} z = x + s \\ x = z + s' \end{cases}$$

Nous en déduisons que  $s' = -s \in S$

**3.1.8 Proposition 3.4**

Soient le groupe  $G = \mathbb{Z}_n (n \geq 1)$  et  $S = \{k + n\mathbb{Z}\}$  une partie de  $G$ , avec  $k$  premier à  $n$ . alors le graphe de Cayley  $C(G, S)$  est cyclique.



**Figure 5.** un graphe de cayley cyclique.

## 3.2 Groupe de Lie $SO_3$ et Graphes de Cayley [19] [21] [3]

### 3.2.1 Définition 3.3

Un groupe de Lie est un groupe  $G$  qui est également une variété de classe  $C^\infty$  et tel que les applications  $g \rightarrow g^{-1}$  et  $(g, h) \rightarrow gh$  soient  $C^\infty$ .

### 3.2.2 Remarque 3.1

On peut également affaiblir la définition pour introduire la notion de groupe topologique. C'est un groupe qui est également un espace topologique et tel que les applications  $g \rightarrow g^{-1}$  et  $(g, h) \rightarrow gh$  soient continues. En pratique, on rencontrera essentiellement des groupes de Lie.

### 3.2.3 Définition 3.4

Un groupe de Lie est un ensemble  $G$  muni des structure du groupe et structure différentielle c-à-d

$$m : G \times G \rightarrow G \text{ et } i : G \rightarrow G \\ (x, y) \rightarrow xy \text{ et } x \rightarrow x^{-1}$$

qui sont les applications lisses.

Donnons quelques groupes de Lie d'une manière générale.

- ✓ Le groupe linéaire général:  $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$  est un ouvert de  $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$  donc c'est une variété différentielle que nous pouvons considérer comme un atlas maximal qui est  $(GL_n(\mathbb{R}), id_{GL_n(\mathbb{R})}$ .  
Sur ce, nous pouvons dire que ce graphe est un groupe par rapport au produit matriciel dont il y a compatibilité entre deux structures.
- ✓ Le groupe de l'orientation: Le groupe de l'orientation que nous noterons par  $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A > 0\}$  est une partie ouverte de  $GL_n(\mathbb{R})$  dont l'homéomorphisme est  $\det : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Alors nous disons que c'est un groupe de Lie.  
En utilisant le théorème de Lie-Cartan qui dit que tous les sous-groupes fermés de  $GL_n(\mathbb{R})$  sont des groupes de Lie et plongés dans  $GL_n(\mathbb{R})$ , et ce qui veut dire que leur topologie est induite.
- ✓ Groupe linéaire special: Le groupe linéaire spécial est défini :  $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$  est une partie fermée de  $GL_n(\mathbb{R})$ , alors selon le théorème de Cartan est un groupe de Lie.
- ✓ Le groupe orthogonal: Le groupe orthogonal est une partie de  $GL_n(\mathbb{R})$  définie par  $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$  selon le théorème de Cartan est un groupe de Lie.
- ✓ Le groupe orthogonal special: Le groupe orthogonal spécial est celui qui nous intéresse pour la construction du graphe de Cayley, alors il est défini comme suit:  $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : AA^t = I_n \text{ et } \det A = 1\}$  ou encore  $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap GL_n^+(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $O_n(\mathbb{R})$  et  $n$  sous-espace fermé de  $GL_n(\mathbb{R})$ , si  $n = 3$ , on aura  $SO_3(\mathbb{R})$ , qui est l'ensemble de toute les matrices de rotation de taille 3x3 dont leurs determinants est 1. Or selon le théorème de Cartan, étant un sous-espace fermé donc est un groupe de Lie.

Dans le contexte des groupes de Lie, les graphes de Cayley peuvent également être utilisés pour explorer les concepts tels que les sous-groupes et les propriétés topologiques des groupes. Ils fournissent une représentation visuelle qui peut aider à comprendre la structure complexe des groupes de Lie, notamment en ce qui concerne leurs sous-groupes et leurs actions.

### 3.2.4 Théorie de graphe dans le groupe de Lie

Un groupe de Lie peut être représenté par un graphe de Cayley en choisissant un ensemble de générateurs. Par exemple, si l'on considère un groupe de Lie comme le groupe des transformations d'un espace, les générateurs peuvent représenter des transformations élémentaires.

Le graphe de Cayley permet alors de visualiser comment les transformations peuvent être combinées pour obtenir d'autres transformations dans le groupe.

**3.2.5 Exemple de construction d'un graphe de Cayley dans un groupe de Lie**

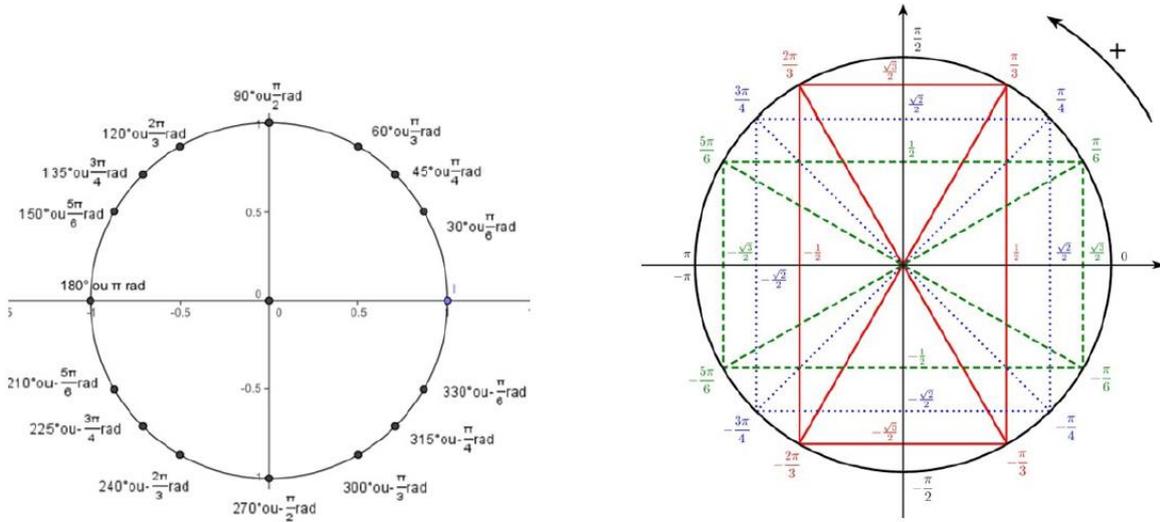
Considérons un groupe de Lie, comme le groupe de rotation dans l'espaces tridimensionnel, noté  $SO_3$ . Ce groupe est constitué de toutes les rotations possibles autour de l'origine dans l'espace.

$$G = \{0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 315^\circ, 330^\circ, 360^\circ\}.$$

Choisissons l'ensemble de générateurs  $S = \{30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}$ , ce générateur permet de créer d'autres rotations par combinaison.

Les arêtes seront définies par la relation décrite  $(x, x + s), \xi \in G \text{ et } s \in S$  c'est-à-dire chaque arête du graphe correspond à l'ajout d'un des générateurs à un élément donné.

Le graphe de Cayley représente les relations entre les éléments de ce groupe de Lie.

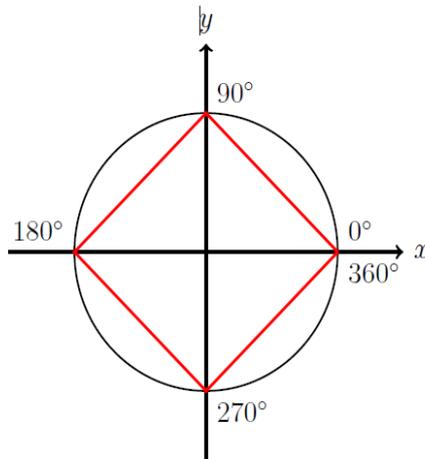


**Figure 6.** Représentation des points dans un cercle trigonométrique

Carre:

$$G = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ, S = 90^\circ.$$

$$G \times G = \{(0^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 180^\circ), (180^\circ, 270^\circ), (270^\circ, 360^\circ)\}.$$

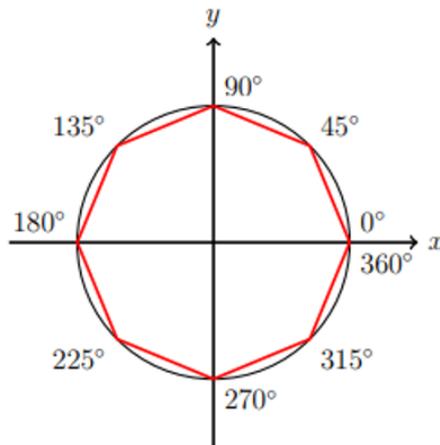


**Figure 7.** Carré (4 sommets)

✚ Octogone:

$$G = \{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ, 315^\circ, 360^\circ\}, \quad S = \{45^\circ\}.$$

$$G \times G = \{(0^\circ, 45^\circ), (45^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 135^\circ), (135^\circ, 180^\circ), (180^\circ, 225^\circ), (225^\circ, 270^\circ), (270^\circ, 315^\circ), (315^\circ, 360^\circ)\}.$$

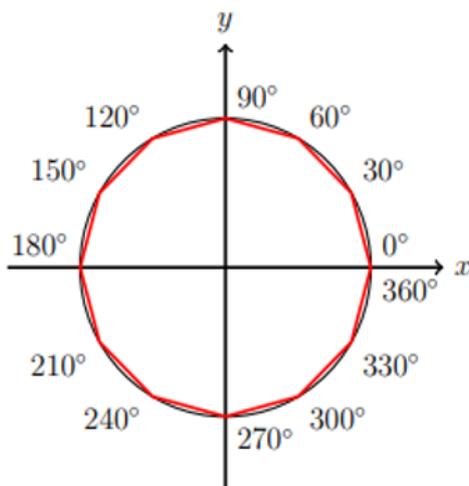


**Figure 8.** Octogone (8 sommets)

✚ Dodécagone:

$$G = \{0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ, 360^\circ\}, \quad S = \{30^\circ\}.$$

$$G \times G = \{(0^\circ, 30^\circ), (30^\circ, 60^\circ), (60^\circ, 90^\circ), (90^\circ, 120^\circ), (120^\circ, 150^\circ), (150^\circ, 180^\circ), (180^\circ, 210^\circ), (210^\circ, 240^\circ), (240^\circ, 270^\circ), (270^\circ, 300^\circ), (300^\circ, 330^\circ), (330^\circ, 360^\circ)\}.$$



**Figure 9.** Dodécagone (12 sommets)

### 3.2.6 Exemple d'application de graphe de Cayley dans le contexte de groupe de Lie dans la vie quotidienne

- ✓ **Systèmes de transport:** Dans les systèmes de transport, comme les réseaux de bus, les arrêts peuvent être considérés comme des nœuds et les lignes de transport comme les arêtes. Les graphes de Cayley peuvent être utilisés pour modéliser ces réseaux et optimiser les itinéraires pour les usagers.
- ✓ **Organisation d'une fête de mariage:** Lors de l'organisation d'une fête de mariage, les différents aspects (lieu, invités, activités) peuvent être représentés par un graphe. Les graphes de Cayley peuvent aider à visualiser les relations entre ces éléments et à planifier efficacement la fête.

### 3.3 Représentation de groupes

Cette section reprend quelques définitions et résultats de la théorie des représentations. Les preuves des diverses propositions énoncées dans cette section ne sont pas reprises ici. Le lecteur pourra les trouver dans [14] et [15].

L'idée de la théorie des représentations est d'étudier la structure d'un groupe en le faisant agir sur un espace vectoriel. Considérons ainsi un groupe  $G$  et un espace vectoriel  $F$  sur un corps  $K$ .

#### 3.3.1 Définition 3.5

Une représentation linéaire de  $G$  sur  $F$  est un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \rightarrow GL(F) \tag{10}$$

où  $GL(F) = \{f : F \rightarrow F \mid f \text{ est linéaire et bijective} \}$ .

On note  $(F, \rho)$  une telle représentation.  $F$  est appelé l'espace de la représentation et la dimension de  $F$  est le degré de la représentation.

On appelle représentation triviale, la représentation  $(F, \rho_i)$  qui envoie tout élément  $g \in G$  sur l'application identité  $\text{Id} : F \rightarrow F$ .

#### 3.3.2 Définition 3.6

Soient  $(F, \rho)$  une représentation linéaire de  $G$  et  $H \subseteq F$  un sous-espace invariant sous cette représentation (c'est-à-dire: pour tout élément  $g \in G$ ,  $\rho(g)H = H$ ). Alors  $(H, \rho)$  est une sous-représentation de  $(F, \rho)$ .

Une représentation qui ne possède pas de sous-représentation sur un sous-espace non trivial est dite irréductible.

#### 3.3.3 Définition 3.7

Une représentation  $(F, \rho)$  du groupe  $G$  est irréductible si elle ne possède pas de sous-espace invariant non trivial. Il existe un moyen de calculer le nombre de représentations irréductibles d'un groupe. Considérons, pour cela, la définition qui suit.

#### 3.3.4 Définition 3.8

Soient  $G$  un groupe et  $g \in G$  un élément de  $G$ . La classe de conjugaison de  $g$  est l'ensemble :

$$C(g) = \{a g a^{-1} \mid a \in G\}. \tag{11}$$

Le nombre de représentations irréductibles de  $G$  est égal au nombre de classes de conjugaison du groupe. Remarquons que si  $G$  est un groupe abélien, alors chaque classe de conjugaison est un singleton et il existe  $|G|$  représentations irréductibles.

Tout groupe fini possède une représentation possédant des propriétés importantes : la représentation régulière.

#### 3.3.5 Définition 3.9

Soient  $G$  un groupe fini et  $W$  l'espace vectoriel de dimension  $|G|$  des fonctions complexes  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . La représentation régulière  $r$  de  $G$  est définie de la manière suivante :

$$r : G \rightarrow GL(W), g \mapsto r(g) \tag{12}$$

où  $[r(g)f](h) = f(h + g)$ .

Il existe un lien très important entre les représentations irréductibles et la représentation régulière. Le voici :

**3.3.6 Proposition 3.5**

Soit  $G$  un groupe fini. Alors toute représentation irréductible de degré  $d$  est facteur de la représentation régulière, de multiplicité  $d$ , c'est-à-dire : si  $\rho_1, \dots, \rho_n$  sont les différentes représentations irréductibles de  $G$  (à isomorphisme près), de degrés respectifs  $d_1, \dots, d_n$ , alors

$$r = d_1\rho_1 \oplus \dots \oplus d_n\rho_n. \tag{13}$$

De plus,  $|G| = d_1^2 + \dots + d_n^2$ .

La dernière égalité de cette proposition nous montre que toutes les représentations irréductibles d'un groupe abélien sont de degré 1. Ainsi, une telle représentation est de la forme :

$$\rho : G \rightarrow \mathbb{C}^\times. \tag{14}$$

**3.3.7 Caractère d'une représentation**

Le caractère d'une représentation d'un groupe fini est très utile pour l'analyse de celle-ci. Les caractères permettent également de classifier les représentations.

**3.3.8 Définition 3.10**

Soit  $G$  un groupe. Le caractère d'une représentation de degré fini  $(F, \rho)$  de  $G$  est la fonction :

$$\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \text{trace}(\rho(g)) \tag{15}$$

Il peut être montré que tout caractère est constant sur une classe de conjugaison.

Un tableau avec les caractères irréductibles (nous entendons par là, caractère d'une représentation irréductible) peut alors être constitué. Supposons avoir  $r$  représentations irréductibles (à isomorphisme près) et notons  $g_i$  un représentant de la classe de conjugaison  $i$ . Le tableau prend alors la forme suivante:

	$g_1$	$g_2$	...	$g_r$
$\chi^1$	$C_{11}$	$C_{12}$	...	$C_{1r}$
$\chi^2$	$C_{21}$	$C_{22}$	...	$C_{2r}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
$\chi^r$	$C_{r1}$	$C_{r2}$	...	$C_{rr}$

**Tableau 1.** Caractères irréductibles

où  $\chi_i$  est le caractère de la représentation irréductible numéro  $i$  et  $C_{ij} = \chi_i(g_j)$ .

Ce tableau possède les deux propriétés suivantes :

**3.3.9 Proposition 3.6**

1. Les lignes du tableau sont des vecteurs de  $\mathbb{C}^r$  orthonormés pour le produit scalaire pondéré:

$$(\chi_i | \chi_j) = \left(\frac{1}{|G|}\right) \sum_{1 \leq k \leq r} c_k \cdot \overline{\chi_i(g_k)} \cdot \chi_j(g_k), \tag{16}$$

où  $c_k$  est le nombre d'éléments de la classe de conjugaison de  $g_k$ .

2. Les colonnes du tableau sont orthogonales deux à deux pour le produit scalaire usuel et le produit de la colonne  $k$  avec elle-même donne  $\frac{|G|}{c_k}$

Les caractères d'un groupe abélien possèdent la propriété intéressante que voici.

**3.3.10 Proposition 3.7**

Tout groupe abélien fini  $G$  possède  $|G|$  caractères irréductibles distincts. De plus, ils forment une base orthogonale de l'espace vectoriel  $W$  des fonctions de  $G \rightarrow \mathbb{C}$  pour le produit scalaire:

$$(f_1|f_2) = \left(\frac{1}{|G|}\right) \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} \cdot f_2(g), \tag{17}$$

où  $f_1, f_2 : G \rightarrow \mathbb{C}$ .

En outre, les caractères d'un groupe abélien fini possèdent la propriété très utile que voici :

**3.3.11 Lemme 3.1.**

Soient  $G$  un groupe abélien fini et un caractère irréductible non trivial  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ , c'est-à-dire il existe un élément  $g \in G$  tel que  $\chi(g) \neq 1$ . Alors

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0. \tag{18}$$

Démonstration.

Comme  $\chi$  n'est pas la représentation triviale, nous savons, par la proposition 3.7 que

$$(1|\chi) = 0, \tag{19}$$

où 1 représente le caractère trivial. Par conséquent,

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0. \tag{20}$$

**4 Graphes de Ramanujan [1] [7] [8] [20]**

**4.1 Définitions**

Les graphes de Ramanujan portent le nom du mathématicien indien du XX<sup>ème</sup> siècle, Srinivâsa Ramanujan. Nous les retrouvons dans de multiples branches des mathématiques comme la théorie des nombres, la théorie des représentations ou encore la géométrie algébrique.

Commençons par définir un graphe de Ramanujan.

**4.1.1 Définition 4.1**

Soit un graphe  $\Gamma = (V, E)$  fini, connexe et  $k$ -régulier. Notons  $\lambda(\Gamma) = \max \{|\lambda| \mid \lambda \text{ est une valeur propre non triviale de } \Gamma\}$ .

Si  $\lambda(\Gamma) \leq 2 \cdot (k - 1)^{\frac{1}{2}}$ , alors le graphe  $\Gamma$  est appelé **graphe de Ramanujan**.

Les graphes de Ramanujan sont connus pour avoir un trou spectral aussi grand que possible. Afin de pouvoir expliquer cette propriété, définissons le trou spectral d'un graphe.

**4.1.2 Définition 4.2**

Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe  $k$ -régulier. En utilisant les mêmes notations que dans la définition 4.1, la quantité  $k - \lambda(\Gamma)$  est appelée le **trou spectral** de  $\Gamma$ .

L'inégalité  $\lambda(\Gamma) \leq 2 \cdot (k - 1)^{\frac{1}{2}}$  impose que le trou spectral d'un graphe de Ramanujan soit aussi grand que possible. En effet, ceci peut être remarqué grâce à la proposition ci-dessous.

**4.1.3 Proposition 4.1**

Soit une famille infinie de graphes  $(\Gamma_n = (V_n, E_n))_{n \in \mathbb{N}}$ , c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow \infty} |V_n| = \infty$ , telle que chaque graphe  $\Gamma_n$  est fini, connexe et  $k$ -régulier.

Notons  $\lambda(\Gamma_n) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ est une valeur propre non triviale de } \Gamma_n\}$ . Alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda(\Gamma_n) \geq 2 \cdot (k - 1)^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

Ce résultat est dû à Alon et Boppana. Une preuve peut en être trouvée dans [8].

**4.1.4 Les graphes somme et les graphes de Cayley [1] [20]**

Cette section a pour objectif de présenter les graphes somme, ainsi que certaines de leurs propriétés. Comme dit plus haut, l'intérêt de ce type de graphes est qu'ils vont nous permettre de construire une famille finie de graphes de Ramanujan.

Dans toute cette section, nous considérons un groupe  $G$  abélien et fini, que nous noterons additivement et un sous-ensemble  $S$  de  $G$ . Les graphes somme sont alors définis de la manière suivante :

**4.1.5 Définition 4.3**

Le **graphe somme**, noté  $\Gamma_s(G, S)$ , est défini comme suit :

1. Le groupe  $G$  est l'ensemble des noeuds.
2. L'ensemble des arêtes est constitué par tous les couples suivants :

$$E = \{(g, -g + s) | s \in S, g \in G\}. \tag{22}$$

3. L'application  $\phi : E \rightarrow G \times G$  est l'inclusion  $E \subseteq G \times G$ .

Bien que fortement similaires, les graphes somme et les graphes de Cayley diffèrent dans leurs propriétés. Le lecteur pourra facilement vérifier la proposition suivante :

**4.1.6 Proposition 4.2**

Les graphes  $\Gamma_s(G, S)$  sont toujours simplement non-orientés et  $|S|$ -réguliers.

Afin de pouvoir étudier les valeurs propres des graphes somme et des graphes de Cayley, la notation suivante est nécessaire :

**4.1.7 Notation 4.1**

Soit  $(F, \rho)$  une représentation du groupe  $G$ . Alors :

$$A_\rho^* = |S| \cdot A_\rho = \sum_{s \in S} \rho(s) \in \text{End}(F), \tag{23}$$

où  $A_\rho$  est l'opérateur et  $\text{End}(F)$  désigne l'ensemble des endomorphismes sur  $F$ .

Comme le groupe  $G$  avec lequel nous travaillons est abélien, les représentations irréductibles  $\rho : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$  sont de degré 1. Dans ce cas, l'opérateur  $A_\rho^*$  est associé à un nombre complexe.

Dans le cas où  $\rho$  est une représentation irréductible, si nous notons  $\rho^{-1}$ , l'application  $\rho^{-1} : G \rightarrow \mathbb{C}^\times, g \rightarrow \frac{1}{\rho(g)}$ , nous remarquons que  $A_{\rho^{-1}}^* = \overline{A_\rho^*}$ . En effet, comme le groupe  $G$  est fini, pour tout élément  $s \in S$ , il existe un naturel  $n \in \mathbb{N}_0$  tel que  $s^n = 1$ . Nous observons donc que :

$$(\rho^{-1}(s))^n = 1 \Rightarrow |\rho^{-1}(s)| = 1. \tag{24}$$

Ainsi,

$$A_{\rho^{-1}}^* = \sum_{s \in S} \rho^{-1}(s) = \sum_{s \in S} \overline{\rho(s)} = \overline{\sum_{s \in S} \rho(s)} = \overline{A_\rho^*}. \tag{25}$$

Cette observation va nous permettre de prouver facilement les deux propositions qui suivent. Elles ont pour objectif d'analyser la matrice d'adjacence des graphes somme et des graphes de Cayley, ainsi que leurs valeurs propres.

**4.1.8 Proposition 4.3**

Notons  $A_s^*$  et  $A_c^*$  les opérateurs de Hecke respectifs des graphes  $\Gamma_s(G, S)$  et  $C(G, S)$ . Alors :

1. Chaque représentation irréductible  $\rho$  de  $G$  est une fonction propre de l'opérateur de Hecke  $A_c^*$  avec  $A_\rho^*$  comme valeur propre.
2. Si  $A_\rho^* = 0$ , alors  $\rho$  et  $\rho^{-1}$  sont deux fonctions propres de l'opérateur de Hecke  $A_s^*$  avec 0 comme valeur propre. Si  $A_\rho^* \neq 0$ , alors  $|A_\rho^*| \cdot \rho \pm A_\rho^* \cdot \rho^{-1}$  sont deux fonctions propres de  $A_s^*$  avec  $\pm |A_\rho^*|$  comme valeurs propres respectives.

Démonstration. Soit  $\rho$  une représentation irréductible de  $G$ :

- $A_c^* \rho(x) = \sum_{s \in S} \rho(x + s) = \rho(x) \cdot \sum_{s \in S} \rho(s) = \rho(x) \cdot A_\rho^*$ .
- $A_s^* \rho(x) = \sum_{s \in S} \rho(-x + s) = \rho(-x) \cdot \sum_{s \in S} \rho(s) = \rho^{-1}(x) \cdot A_\rho^*$ .

A partir de ces deux observations, la thèse s'ensuit.

**4.1.9 Proposition 4.4**

Notons  $A_s^*$  et  $A_c^*$  les opérateurs de Hecke respectifs des graphes  $\Gamma_s(G, S)$  et  $C(G, S)$ . Alors :

1. Nous avons :

$$\{|\lambda| \mid \lambda \text{ est une valeur propre de } A_s^*\} = \{|\mu| \mid \mu \text{ est une valeur propre de } A_c^*\}.$$

De plus, cet ensemble est :

$$\{|\sum_{s \in S} \rho(s)| \mid \rho \text{ est un caractère irréductible de } G\}. \tag{26}$$

2. Les opérateurs de Hecke  $A_s^*$  et  $A_c^*$  sont diagonalisables par une base orthonormale de fonctions de  $G$ .

Démonstration.

1. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la proposition précédente.
2. Par la proposition 3.7, nous savons que les caractères irréductibles de  $G$  forment une base orthogonale de l'espace vectoriel  $W$ . De plus, par le point 1 de la proposition 3.6, nous avons :

$$(x_i \mid x_j) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} \overline{x_i(g)} \cdot x_j(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i \neq x_j \\ 1 & \text{si } x_i = x_j \end{cases}. \tag{27}$$

Les caractères de  $G$  forment donc une base orthonormée de l'espace  $W$  pour le produit scalaire pondéré. Le point 1 de la proposition précédente affirme que cette base est constituée de fonctions propres de l'opérateur  $A_c^*$ . Nous avons ainsi montré que  $A_c^*$  est diagonalisable par une base orthonormale de fonctions de  $G$ .

Remarquons que si  $A_\rho^* \neq 0$ , alors les fonctions propres  $|A_\rho^*| \cdot \rho \pm A_\rho^* \cdot \rho^{-1}$  de  $A_s^*$  sont orthogonales. En effet,

$$\langle |A_\rho^*| \cdot \rho + A_\rho^* \cdot \rho^{-1} \mid |A_\rho^*| \cdot \rho - A_\rho^* \cdot \rho^{-1} \rangle = \frac{1}{|G|} \cdot |A_\rho^*| \cdot \sum_{g \in G} [A_\rho^* \rho(-2g) - A_{\rho^{-1}}^* \rho(2g)], \tag{28}$$

si  $\rho^2$  est non trivial sur  $G$ , alors, par le lemme 4.1, les deux sommes  $\sum_{g \in G} \rho(-2g)$  et  $\sum_{g \in G} \rho(2g)$  sont nulles. Si  $\rho^2 = 1$ , alors  $\rho = \rho^{-1}$  et tout s'anule également.

Cependant, pour  $A_\rho^* \neq 0$  et  $\rho^2 \neq 1$ , les fonctions  $|A_\rho^*| \cdot \rho \pm A_\rho^* \cdot \rho^{-1}$  mises ensemble avec les caractères restant forment une base orthogonale. Le point 2 de la proposition précédente, nous assure que les éléments de cette base sont des fonctions propres de  $A_s^*$ .

Nous avons donc montré que  $A_s^*$  est diagonalisable par une base orthonormale de fonctions de  $G$ .

Ces différents résultats nous seront utiles dans la section suivante pour la construction d'une famille finie de graphes de Ramanujan.

**4.2 Construction d'une famille finie de graphes de Ramanujan**

Cette section a pour objectif de construire une famille finie de graphes de Ramanujan à l'aide des graphes de Cayley et des graphes somme, présentés à la section précédente. Dans un premier temps, nous rappellerons quelques notions de théorie de Galois et ensuite, nous construirons une famille finie de graphes de Ramanujan.

**4.3 Quelques notions de théorie de Galois**

Cette section a pour objectif de rappeler au lecteur quelques notions de la théorie de Galois. Les résultats présentés ici ne feront pas l'objet d'une preuve, le lecteur pourra toutefois les trouver dans [12].

Tout d'abord, remarquons que pour toute extension finie de corps, il existe une application, dite application norme, définie ci-dessous.

#### 4.3.1 Notation 4.2

Soient un corps  $F$  et une extension finie  $K$  de ce corps. Notons  $K/F$  cette extension.

#### 4.3.2 Définition 4.4

Soit  $K/F$  une extension finie de corps. La norme de l'extension  $K/F$  est l'application :

$$N_{K/F} : K \rightarrow F, \lambda \rightarrow \det(\lambda), \quad (29)$$

où  $\lambda$  désigne la multiplication par  $\lambda$ .

Il est très simple de vérifier que l'application norme est un homomorphisme ; cela est dû au fait que  $\lambda\mu = \lambda \circ \mu$ .

Les extensions galoisiennes sont des extensions de corps très particulières, qui sont très utiles pour les preuves de nombreux théorèmes.

#### 4.3.3 Définition 4.5

Une extension de corps  $K/F$  est galoisienne s'il existe un groupe fini  $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  d'automorphismes de  $K$  tel que

$$F = K_G := \{x \in K \mid \sigma_1(x) = \dots = \sigma_n(x) = x\}. \quad (30)$$

Dans ce cas, la dimension de  $K$  sur  $F$ , notée  $[K : F]$  est  $|G|$ . De plus,  $G$  est appelé le **groupe de Galois** de  $K/F$  et est noté  $\text{Gal}(K/F)$ .

La proposition et le corollaire suivants donnent une méthode pour déterminer si une extension est galoisienne. Leurs énoncés utilisent les notations de la définition précédente.

#### 4.3.4 Proposition 4.5

Si  $K/F$  est galoisienne, alors

$$G = \text{Aut}_F K, \quad (31)$$

où  $\text{Aut}_F K$  désigne l'ensemble des automorphismes de  $K$  sur  $F$ .

#### 4.3.5 Corollaire 4.1

Une extension finie est galoisienne si  $|\text{Aut}_F K| \geq [K : F]$ .

Le résultat suivant montre que toute extension d'un corps fini est galoisienne.

#### 4.3.6 Proposition 4.6

Soient  $F$  un corps fini à  $q$  éléments et  $K_n$  une extension de  $F$  de dimension  $n$ . Alors l'application :

$$\Phi : K_n \rightarrow K_n, x \rightarrow x^q, \quad (32)$$

Est un automorphisme, appelé automorphisme de Frobenius. De plus, l'extension  $K_n/F$  est galoisienne, de groupe de Galois :

$$\{1, \Phi, \dots, \Phi^{n-1}\}. \quad (33)$$

L'application norme d'une extension galoisienne s'exprime à partir de son groupe de Galois, comme le montre le résultat suivant :

**4.3.7 Proposition 4.7**

Soient un corps  $F$  et une extension galoisienne finie  $K$  de  $F$ . Alors l'application norme est de la forme :

$$N_{K/F} : K \rightarrow F, \lambda \rightarrow \prod_{\sigma \in G} \sigma(\lambda), \tag{34}$$

où  $G$  désigne de groupe de Galois de  $K/F$ .

Tous ces résultats vont nous permettre de construire une famille finie de graphes de Ramanujan.

**4.4 Une famille finie de graphes de Ramanujan**

Considérons un corps fini  $F$  et notons  $q$  le nombre d'éléments de  $F$ . Pour  $n \geq 2$ , notons  $K_n$  une extension de  $F$  de degré  $n$  et  $F_n$  le noyau de l'application norme  $N_{K_n/F} : K_n \rightarrow F$ . Comme  $[K_n : F] = n$ , nous avons  $|K_n| = q^n$ .

Montrons que le cardinal de  $F_n$  est  $\frac{q^{n-1}}{q-1}$  : par la proposition 4.6, nous savons que l'extension  $K_n/F$  est galoisienne de groupe de Galois

$$\{1, \Phi, \dots, \Phi^{n-1}\}. \tag{35}$$

où  $\Phi$  désigne l'automorphisme de Frobenius sur  $K_n$ . De plus, grâce à la proposition 4.7, remarquons par un simple calcul que l'application norme est définie de la manière suivante :

$$N_{K_n/F} : K_n \rightarrow F, x \rightarrow x^{\frac{q^{n-1}}{q-1}}. \tag{36}$$

Par conséquent,

$$F_n = \{x \in K_n^\times \mid x^{\frac{q^{n-1}}{q-1}} = 1\}. \tag{37}$$

Nous en déduisons donc que  $|F_n| \leq \frac{q^{n-1}}{q-1}$ .

De plus, comme  $|K_n^\times| = |F_n| \cdot |N_{K_n/F}(K_n^\times)|$  et  $|N_{K_n/F}(K_n^\times)| \leq q-1$ ,

Nous déduisons que  $q^{n-1} \leq |F_n| \cdot (q-1)$ . Tout ceci montre que  $|F_n| = \frac{q^{n-1}}{q-1}$ .

Pour tout  $n \geq 2$  et pour tout  $c \in K_n$ , considérons le graphe somme  $\Gamma_s(K_n, F_n + c)$  et le graphe de Cayley  $C(K_n, F_n + c)$ . Comme nous l'avons vu à la section précédente, ces graphes sont  $|F_n|$ -réguliers et possèdent, par définition,  $q^n$  noeuds. Le théorème suivant va nous permettre de conclure que pour  $n = 2$ , nous avons une famille finie de graphes de Ramanujan (pour une preuve : voir [7], p.204).

**4.4.1 Théorème 4.1**

Soient  $n \geq 2$  et  $c \in K_n$ . Toute valeur propre non triviale  $\lambda$  des graphes  $\Gamma_s(K_n, F_n + c)$  et  $C(K_n, F_n + c)$  satisfait l'inégalité:

$$|\lambda| \leq n \cdot q^{\frac{n-1}{2}}. \tag{38}$$

De plus, la multiplicité de la valeur propre triviale  $|F_n|$  est 1.

En particulier, les graphes  $\Gamma_s(K_n, F_n + c)$  et  $C(K_n, F_n + c)$  sont connexes. En effet, s'ils étaient non connexes,  $|F_n|$  aurait une multiplicité au moins égale à 2.

Or, ceci est impossible par le théorème.

En conclusion: si  $n = 2$ , alors  $|F_n| = q + 1$  et la limite supérieure des valeurs propres non triviales donnée par le théorème est:

$$2 \cdot (|F_n| - 1)^{\frac{1}{2}}, \tag{39}$$

Ce qui est la borne des graphes de Ramanujan. De plus, par ce qui précède, nous remarquons que pour  $n = 2$ , l'ensemble des graphes  $\Gamma_s(K_n, F_n + c)$  et  $C(K_n, F_n + c)$  forment une famille finie (pour  $|K_n|$  fixé) de graphes

de Ramanujan. La propriété 2 de la proposition 4.4 nous montre en outre que leur matrice d'adjacence est diagonalisable à l'aide d'une matrice unitaire.

Bien sûr, il est possible de construire une famille infinie de graphes de Ramanujan. Diverses méthodes existent: une méthode fut proposée par Lubotzky, Phillips, Sarnak et Margulis et une autre méthode par Mestre et Oesterlé. Ces deux méthodes sont toutes deux arithmétiques et le lecteur pourra trouver une présentation de celles-ci dans [2].

## 5 Conclusion et Perspectives

L'étude des graphes de Cayley nous a permis de déterminer ses valeurs propres. L'étude des graphes de Ramanujan découle de celle de Cayley avec une attention particulière sur ses deux plus grandes valeurs propres. Plus loin, en examinant les graphes de Ramanujan, nous avons considéré une catégorie des graphes particuliers appelés graphes Somme, lesquels ont permis de construire une famille finie de graphes de Ramanujan. 1

En perspective, nous allons utiliser ces graphes de Ramanujan pour étudier la connexité de tels graphes ainsi que leurs propriétés d'expansion.

## REFERENCES

- [1] M. Trefois, Spectre de graphes et propriété d'expansion, Mémoire de Master en Sciences Mathématiques, Université Libre de Bruxelles, 2009.
- [2] N. Bourbaki, Séminaire, pp. 253-260, 1996-1997.
- [3] J.H. Conway et N.J.A. Sloane, Sphere Packings, Lattices and Groups, Springer-Verlag, p. 452, 1988.
- [4] J. Friedman, R. Murty et J.-P. Tillich, Spectral estimates for Abelian graphs, pp. 111-121, 2004.
- [5] W. Fulton et J. Harris, Representation theory-a first course, Springer, 1991.
- [6] S. Hoory, N. Linial et A. Wigderson, Expander graphs and their applications, pp. 452-457, 469-481, 503-514, 522-536, 2006.
- [7] W. Li, Character Sums and Abelian Ramanujan Graphs, pp. 199-217, 1991.
- [8] A. Lubotsky, R. Phillips et P. Sarnak, Ramanujan graphs, Combinatorica, pp. 161-277, 1988.
- [9] N. Nielsen, Die Gammafunktion, Chelsea publishing company, Bronx, New York, p. 91, 1965.
- [10] J.-P. Serre, Arbres, Amalgames, SL<sub>2</sub>, Société Mathématique de France, 1977.
- [11] J.-P. Serre, Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris, 1967.
- [12] J.-P. Tignol, MAT2120 : Théorie de Galois et représentation des groupes, 2009.
- [13] N. Verdier, A quoi servent les mathématiques?, Les essentiels Milan, pp. 20, 22, 35, 39, 1998.
- [14] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory-a first course*, Springer, 1991.
- [15] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1967.
- [16] Jacques Teghem Recherche Opérationnelle, tome 1 Méthodes d'optimisation. Ellipses 2012.
- [17] N. Gondran et M. Minoux. Graphes et algorithmes. Eyrolles, Paris, 1979.
- [18] M. Minoux et G. Bartnik. Graphes, algorithmes, Logiciels. Dunod, Paris 1986.
- [19] Frédéric Paulin, Groupes et géométries, (FMJH), Paris, année 2013-2014.
- [20] N. Anzola Kibamba, J. Biaba Kuya et Al, Etude de Spectre de graphe de cayley, 2024.
- [21] N. Bourbaki, Groupe et algèbres de Lie, Hermann, Paris, 1971.