Revue-IRS

Revue Internationale de la Recherche Scientifique
(Revue-IRS)
ISSN: 2958-8413
Vol. 3, No. 2, Avril 2025

TRANSITION SECONDAIRE – SUPERIEUR EN ART DE BATIR : ETUDE SUR LES ESSAIS DE LEVEE D'INDETERMINATION DES LIMITES DE FONCTIONS RATIONNELLES DANS LE REGISTRE GRAPHIQUE

Par
WANE MUNDONI Bonguon
Professeur à l'Institut Supérieur d'Architecture et d'Urbanisme, RDC.

Abstract : This work présents mathematical praxeology of learns of the high school-higher education transition, during the tests of the indeterminaly of the limits of rational function in graphic register. The theory of Anthropology of Didactics in its praeological aspects and the notion of semiotics dIdactic were used to analyze and compare some tests of calculation limits raised above. These tests have revealed thint several factors influence the inderterminaly of the limits in the graphic register and the technologies of geometry should be taken into account to lift these indeterminations.

Key words : limits, functions, praeolgy, indeterminaly and graphic register.

Résumé : Ce travail présente les praxéologies mathématiques des apprenants de la transition secondaire-Supérieur, lors des essais de la levée d'indétermination des limites de fonctions rationnelles dans le registre graphique. La Théorie d'Anthropologie du Didactique dans son aspect praxéologique et la notion de sémiotique didactique ont été mises à profit, pour analyser et comparer quelques essais de calculs des limites sus-évoquées. Ces essais ont révélé que plusieurs facteurs influencent la levée d'indétermination des limites dans le registre graphique, et il y a lieu de prendre en compte les technologies de la géométrie, en vue de lever ces indéterminations.

Mots clés : limite, fonction, praxéologie, indétermination et registre graphique

Digital Object Identifier (DOI): https://doi.org/10.5281/zenodo.**15223968**

1. Introduction

Généralement, dans la pratique de calcul des limites des fonctions numériques, l'utilisateur remplace la valeur de la tendance dans la fonction, pour déterminer la valeur de la limite. S'il s'agit d'un cas d'indétermination, plusieurs techniques sont appliquées pour lever cette indétermination. La technique de l'Hospital (la règle de la dérivée de fonction), l'un des ingrédients du fragment pratico-technique de la praxéologie mathématique en est une illustration. Elle permet la levée de l'indétermination des limites de fonctions rationnelles.

Dans le cas de registre algébrique ou fonctionnel, la technologie rattachée au calcul de limite de fonction rationnelle définie par $\lim\limits_{a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{a} f(x)}{\lim\limits_{a} g(x)}$ n'est plus à démontrer. Il est trivial de constater que cette technologie met en exergue deux composantes, considérées comme deux fonctions partielles d'une fonction donnée, caractérisant la limite de deux fonctions différentes. Si l'évidence de cette technologie est vraisemblablement constatée dans le registre algébrique ou fonctionnel lors de la levée d'indétermination des limites de fonctions rationnelles, qu'en est-il de la levée d'indétermination dans le registre graphique ?

Nous pensons qu'en rapport avec la technologie de désagrégation des limites d'une fonction rationnelle, tout fragment praxéologique excluant la technologie d'infiniment petit et d'approximation, engendrerait une portée didactique insatisfaisante et non rassurante pour lever l'indétermination des limites de fonctions rationnelles dans le registre graphique. L'articulation de différents ostensifs associés aux différents registres numérique, algébrique et analytique constitue des indicateurs de la portée didactique des fragments praxéologiques des apprenants.

Cette étude, au niveau de la transition secondaire-supérieur, vise la caractérisation des ingrédients influenceurs des praxéologies mathématiques des apprenants lors de la levée d'indétermination des limites de fonctions rationnelles dans le registre graphique. Aussi, elle détermine les écarts significatifs, les confins et les restrictions des praxéologies mathématiques dans le calcul de levée d'indétermination des limites des fonctions en étude.

Le choix de la levée d'indétermination des fonctions rationnelles dans le registre graphique s'explique par le fait que dans la filière art de bâtir, les situations sont souvent modélisées par des graphiques et peuvent être comparées en un point d'intersection ou sous forme de rapport de valeurs en une période donnée. Dans ce cadre, le prélèvement de données peut s'étendre dans la projection exponentielle ou linéaire vers une période finie ou infinie.

2. Aspects didactico- épistémologiques de la notion des limites de fonctions

La recherche de R.Bkouche (1996) nous renseigne sur les trois points de vue épistémologiques en rapport avec la notion des limites de fonctions. Le point de vue cinématique où l'importance est accordée à l'approximation de l'abscisse pour approcher l'ordonné. Cela caractérise l'établissement d'une relation entre les variables indépendantes et dépendantes, en stipulant que la première variable « tire » la fonction. Le point de vue « approximation » qui indique que le raisonnement approximatif de l'image f(x) est plus visé dans le calcul de limite. A cet effet, le degré d'approximation de la fonction est tributaire de celui de la variable. Par conséquent, il existe, comme au premier point de vue, un lien entre les deux variables. Le point de vue « opératoire » qui se caractérise par la prévalence des « théorèmes opératoires » qui sont des technologies algébriques rattachées aux taches ou sous-tâches données.

Par ailleurs, dans le cadre des obstacles observés lors de calcul des limites de fonctions, Cornu (1983) évoque les difficultés liées à la fonction constante, à la représentation de l'infini comme nombre et à l'aspect infranchissable de la limite. IL les considère comme obstacle et établit la question du positionnement exact de la valeur réelle de la limite et de l'indétermination du type $\frac{0}{0}$, un rapport qui aboutit à une quantité finie.

De son côté, Sterpinska (1985), au-delà des obstacles qu'il qualifie de « l'horreur de l'infini », définit une série d'obstacles épistémologiques à savoir : les obstacles liés à la notion de fonction, obstacles géométriques, obstacles logiques et obstacles du symbole. Dans son aspect didactique en rapport avec la Théorie Anthropologie du Didactique, BOSCH et Gascon (2002) modélisent deux praxéologies mathématiques locales de référence autour des limites de fonctions. La première s'articule autour de l'algèbre des limites, où les fragments praxéologiques y rattachés sont des outils ou objets algébriques. La deuxième est en rapport avec la topologie des limites. Ils stipulent que ces deux praxéologies locales sont intégrées dans une praxéologie régionale, dont les notions de dérivabilité et d'intégrabilité font partie prenante.

Sur cette lancée, Ngoffou (2018) a répertorié chez les élèves des conceptions récurrentes liées au concept de limite. Sans prétendre à son exhaustivité, il a cité : la contumace de limite d'une fonction constante puisqu'elle ne varie pas ; la limite d'une fonction n'est déterminée qu'aux bornes de son domaine de définition ; les élèves estiment que « 0 × ∞ = 0 » ; dans le cas de lim$x \to +\infty$, x n'atteindra jamais l'infini et les élèves se représentent l'infini comme un réel.

3. Ingrédients praxéologiques mathématiques mis en étude

3.1. Définition de limite d'une fonction

Soit f une fonction définie dans un domaine D ⊂ IR et a ∈ D, la limite de f pour x tend vers a est égale au réel k, si en donnant à x des valeurs suffisamment proches de a, f(x) prend des valeurs assez proches de k, et l'on note $\lim_{x \to a} f(x)$ *= k (*WANE, 2023).

3.2. Technologie de désagrégation des limites de fonctions de constituants d'une fonction rationnelle

Pour deux fonctions numériques f et g, et a un réel, la technologie rattachée au calcul des limites de fonctions rationnelles, définie par « $\lim_{a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{a} f(x)}{\lim_{a} g(x)}$ » (Badetty Loshima et al, 2022), est la propriété des limites de quotient de deux fonctions. Il est trivial de constater que cette technologie met en exergue deux composantes, considérées comme deux fonctions partielles d'une fonction donnée, caractérisant la limite de deux fonctions différentes.

Dans cette étude, cette technologie est considérée comme une propriété de désagrégation de limites des fonctions rationnelles, contrairement au principe d'assortiment ou d'assemblage des constituants d'une fonction rationnelle. A cet effet, il est vraisemblable de dire que dans le mode de désagrégation, où chaque composante du rapport génère son graphique, le calcul de limite de fonctions rationnelle dans le registre graphique, tiendra compte cet aspect de chose.

3.3. Nombre dérivé ou coefficient directeur de la tangente en un point de la courbe

(Mwanza, 2020) définit le nombre dérivé d'une fonction f en un point d'abscisse a, comme étant *le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en ce point. On le note f '(a)*. En d'autres termes, le nombre dérivé en un point du Domaine de définition d'une fonction f, est la limite définie $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ce même nombre correspond au taux d'accroissement de la fonction f entre a et a+h ou au coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a de la courbe représentative de la fonction f.

3.4. Levée d'indétermination de limite d'une fonction numérique

Praxéologiquement, la levée d'indétermination est une technique rattachée à la technologie de la dérivée. Elle consiste à déterminer la vraie valeur de la limite indéterminée d'une fonction de la manière suivante : « *Soit f et g des fonctions de domaines respectifs D_f et D_g, et x_0 un élément de D_f ∩ D_g. Si f et g sont nulles et dérivables en x_0 et que «* $\lim_{a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe alors «* $\lim_{a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$)

(Badetty Loshima et al, 2022, p. 310-311). Cette technique de Bernouilli connue sous le nom de la règle de l'Hospital est applicable dans le cas de limites de fonctions de formes $\frac{0}{0}\ et\ \frac{\infty}{\infty}$.

4. Cadre théorique et méthodologique

4.1. Cadre théorique

Dans ce travail, deux cadres théoriques sont mis en jeu. Il s'agit de la théorie de l'anthropologie du didactique de Chevallard (1998), dans son aspect praxéologique et de la notion de sémiologie didactique, dont le registre de représentation sémiotique de Duval(1993).

4.1.1. Tétrade praxéologique

Chevallard (1998) stipule que les activités mathématiques dans une institution peuvent être analysées au moyen des praxéologies y rattachées. Sur cette lancée, (WANE, 2020) évoque la **tétrade praxéologique** [T/ τ/ θ/Θ], un quadruplet défini par Chevallard (2017) comme l'un des outils permettant d'analyser une activité mathématique. Les composantes y associées sont les types de tâches (ou sous-tâches) T, la technique τ, la technologie θ et la théorie Θ. Ces composantes sont des « ingrédients institutionnels » de la praxéologie, et la fragmentation de cette dernière, donne lieu aux *blocs pratico-technique [T / τ] et technologico-théorique [θ / Θ].*

L'analyse et les interprétations possibles de différents éléments de ces blocs nous aident à percevoir les organisations praxéologiques (connaissances et savoirs) mises en œuvre par les apprenants lors de l'exécution des tâches.

4.1.2. Registre de représentation sémiotique

Dans les activités mathématiques, les acteurs mobilisent des savoirs qui, finalement, sont analysés par des outils didactiques. Duval (1993) considère *une* figure géométrique, un énoncé en langue naturelle, une formule algébrique, un graphe comme des représentations sémiotiques qui relèvent de systèmes sémiotiques différents. » (Duval, 1993, p.39).

Par ailleurs, Bloch (2000*,* p.200), met en évidence des registres de représentation sémiotique pour le traitement d'une activité mathématique. Il est intéressant de mettre en considération des registres de représentation sémiotique pour le traitement d'une activité mathématique.

La conciliation des approches relatives au registre de représentation sémiotique, selon Duval (1993) et Bloch (2000), permet de retenir dans ce travail cinq types de registres à savoir : Les registres algébrique, analytique, numérique, graphique et géométrique.

4.2. Agencement des essais de calcul de limites des fonctions en étude

4.2.1. Déroulement des essais de calcul

Ce travail a été réalisé avec 346 apprenants de la classe de transition secondaire-supérieur de l'Institut Supérieur d'architecture et d'urbanisme de la RDC. A ce niveau transitoire, bien avant ce travail, les apprenants ont appris la notion de limites des fonctions numériques, tant au niveau secondaire que supérieur.
Pour mieux comprendre, dans le cadre de cette étude, les actes posés par les apprenants, Six exercices ont a été soumis aux apprenants de classe de transition secondaire-supérieur. Ces exercices nous ont permis d'analyser des praxéologies mathématiques réalisées par les apprenants. Aussi, ils ont permis de déceler les écarts afférant à la levée d'indétermination des limites de fonctions rationnelles représentées graphiquement, au regard de la technologie sus-évoquée.

Pour lever l'indétermination des limites de fonctions, deux tendances de variable ont été retenues, notamment les valeurs finie et infinie. Dans cette étude, 3 variables didactiques ont été mises en jeu pour mieux analyser les productions des apprenants : le type de la tendance de limite, le registre de représentation sémiotique des fonctions et le degré de la fonction polynôme.

Conformément à la technologie rattachée au calcul de limite de fonctions rationnelles, ces exercices ont été présentés séparément dans deux registres de représentation (algébrique ou fonctionnelle et graphique).
Les essais dont il est question, ont été organisés en trois phases. La première phase s'est articulée autour de ces six exercices soumis aux apprenants pour calculer des limites des fonctions, selon la praxéologie mathématique de leur choix. Elle s'en est suivie de la deuxième phase, au cours de laquelle, les mêmes fonctions, ont été représentées dans le registre graphique. En référence à la technologie des limites de fonctions rationnelles, deux modes de représentation ont été adoptés, notamment les modes d'assortiment et de désagrégation. Le premier mode concernait l'assortiment des limites de fonctions constituantes de fonctions rationnelles. Par ailleurs, le deuxième mode consistait à la désagrégation des limites des constituants d'une fonction rationnelle.

Du fait que le premier fragment praxéologique rattaché au registre graphique est une première pour eux, des orientations méthodologiques et praxéologiques consacrées au registre graphique ont été fournies pour une bonne appropriation. Ces orientations méthodologiques et praxéologique ont débouché sur la troisième phase. Laquelle phase tient aussi compte des technologies géométriques et d'infiniment petit. Les données recueillies ont fait l'objet des analyses praxéologiques qui ont débouché sur une confrontation et ce, en vue de répertorier les différentes caractéristiques des praxis utilisés.

4.2.2. Présentation des exercices retenus pour les essais

4.2.2.1 Phase concernant le libre choix de praxéologie

Exercice n°1

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3X-12}{2X-8}$ $b)$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{X^2-2x+1}{X-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{X^2-2x+1}$ d) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{X^2-5X+6}{X-3}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{X^2-5x+6}$ f) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{X^2-4x+4}{X^2-5x+6}$

Exercice n°2

Calculer la limite de chacune des fonctions définies à l'exercice n°1 lorsque x tend vers +∞ .

4.2.2 Phase relative au registre graphique

Dans cette phase, les exercices n°1 et 2 de la phase « libre choix de praxéologie », ont été convertis sous forme graphique, et soumis aux apprenants dans le registre graphique respectivement en mode d'assortiment aux n° 3 et 4, et en mode de désagrégation aux n° 5 et 6.

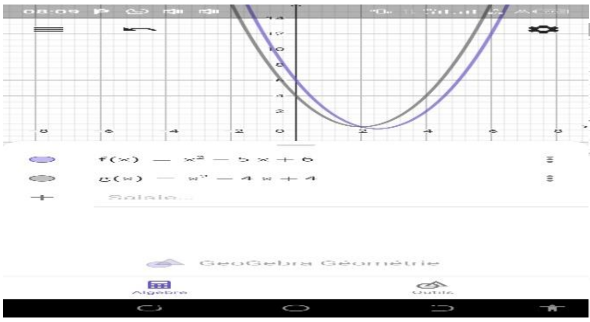

fig.1. Exercices 5.f et 6.f

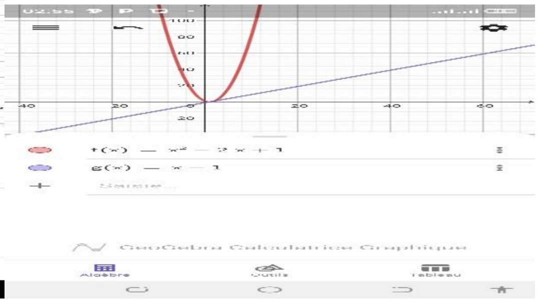

fig.2. Exercices 5.b et 6.b

Ces six premiers exercices peuvent être résolus par la méthode de simplification après mise en évidence des facteurs communs. Aussi, la règle de l'Hospital et la technologie relative aux limites à l'infini des fonctions rationnelles, partant de l'observance des degrés de numérateur et dénominateur qui sont les différentes composantes de la fonction rationnelle. En outre, selon le mode de représentation graphique, la résolution de ces exercices tiendra compte des praxéologies rattachées à l'infiniment petit, telles que la notion des dérivées.

4. Résultats des essais

4.1. Essais relatifs au libre choix du bloc praxéologique

4.1.1. Cas de limite en une valeur finie

Dans la résolution des sous-types de taches de l'exercice 1**,** de prime à bord, la technique de remplacement de la valeur de la tendance dans la fonction, a été appliquée par la majorité des apprenants (soit 97,6%). Cette technique a débouché sur le constat de l'indétermination. Dans la suite, la technique de l'Hospital s'est caractérisée par sa prégnance, en vue de lever l'indétermination des limites de fonctions. Bien que cette technique ait permis aux apprenants de trouver de bonnes réponses, nous estimons qu'ils appliquent le raisonnement selon lequel $\lim_{X \to a} f(x)$ = f(a). Elle a démontré sa prégnance dans les productions des apprenants, mais sa portée, dans le contexte de ce travail, n'est pas rassurante. Quelques rares apprenants ont utilisé les artifices de calcul incluant la mise en évidence des facteurs communs ou la division Euclidienne.

4.1.2. Cas de limite en l'infini

Lors de la résolution des sous-types de tache de l'exercice 2, où la tendance de la limite est fixée vers l'infini, la majorité des étudiants (soit 87,6%) ont appliqué la technique qui consiste à comparer les degrés des polynômes (numérateur et dénominateur). Quelques rares apprenants ont appliqué la technique de l'Hospital. Les deux techniques ont bien fonctionné.

Il est sied de constater que dans les deux sous-types de taches, les praxéologies mathématiques des apprenants sont organisées fortement autour de la technique de l'Hospital pour les limites à valeur finie et de la technique de comparaison des degrés de polynômes pour les limites à l'infini. Une technique qui, du reste, confirme sa portée relative.

4.2. Essais dans le registre graphique

4.2.1. Cas d'assortiment des limites de fonctions constituantes d'une fonction rationnelle

4.2.1.1. Cas de limite en une valeur finie

A l'exception des exercices 3.a, 3.c, 3.d et 3.f du mode d'assortiment, qui ont connu respectivement 34,1% des réussites ; 86,8 % d'étudiants ont déterminé, pour les deux autres exercices (3.b et 3.e), les vraies valeurs des limites en différents points des courbes représentatives des fonctions données. Les étudiants qui ont réussi à ces exercices, ont justifié leurs bonnes réponses par le fait d'orienter le raisonnement vers l'aspect causal ou intuitif. Ils ont cherché la valeur de l'ordonné qui correspond à la valeur de la tendance. Cela confirme que les apprenants exploitent la définition suivante : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Par ailleurs, les échecs à l'exercice 3.a défini en mode d'assortiment, montrent la difficulté de l'interprétation de la fonction constante, dont l'une des coordonnées ne varie pas. Dans la résolution de cet exercice, ceux qui ont échoué, n'ont pas mobilisé la technologie $\lim_{x\to a} f(x) = k$, afin de considérer, quelle que soit la valeur de l'abscisse, l'ordonné ne varie. Cette manière de faire dénote de la difficulté de déterminer sur le graphique, la valeur Y_0 issue de voisinage de x_0. Par conséquent, la prise en compte de la technologie d'infiniment petit, est quasiment inexistante. Aussi, Les échecs aux exercices 3.c, 3.d et 3.f sont la conséquence de la discontinuité de la fonction au point de la tendance de variable, où la limite n'existe pas. Il en est de même pour la forme asymptotique qu'admet la courbe.

4.2.1.2. Cas de limite à l'infini

Pour l'ensemble des exercices posés, la moyenne de réussite est de 54,3 % contre 45,7 % d'échecs. De prime à bord, les étudiants ont solutionné ces exercices en se basant sur la l'extrémité de l'axe des abscisses. La bonne estimation de la position de l'infini et son interprétation ont été des atouts indispensables qui ont milité à la réussite de ces exercices. Ils ont considéré des grandes valeurs sans les approximer conséquemment. Lors de la résolution, les étudiants ont éprouvé la difficulté de l'approximation de l'infiniment petit.

Le constat des échecs tourne autour de la valeur de l'infini. Ceux qui se sont attachés à la définition $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ se sont butés à la valeur de l'infini qui n'est pas fixe sur l'axe des Réels. Aussi, leur difficulté s'explique par le fait que le graphique ne couvre pas à la fois le domaine de définition de la fonction. Pour des courbes dont les graphiques s'approchent de l'axe des abscisses à l'infini, les apprenants ont estimé rarement la valeur nulle de la limite. Dans d'autres cas, en cas de discontinuité des fonctions, où une branche de la courbe se dirige vers les grandes valeurs d'ordonnés, ils estiment que la valeur de la limite à l'infini correspondant à une abscisse finie.

Quelques réactions des apprenants illustrent combien les tergiversations ont été à l'œuvre et caractérisent les difficultés des apprenants par rapport à l'interprétation graphique de la courbe. Nous notons par exemple quelques extraits y relatifs :

- Difficulté liée à l'absence des données chiffrées : « *pourquoi il n'y a pas de données », « il n'y a pas d'autres données ? ... », « Je veux que la limite de x tende vers l'infini, mais il y a pq de x dans la fonction » « au lieu de donner le nombre ou valeur de x et y, vous données f et g… » « Sans variable, il n'y a pas référence »* ; « *si au moins, on avait donné f(x) à partir de ça, on pouvait avoir les coordonnées de x à travers le graphique… » ;*

- Difficulté liée au sens attribué à l'infini. Les apprenants estiment que, graphiquement l'infini est la valeur qui se trouve à l'extrémité de chaque axe des coordonnées. Cette conception erronée a été soutenue par les apprenants lors de la fixation de l'infini dans une position extrême dans l'ensemble des Réels IR. La place qu'occupe l'infini sur l'axe des Réels influe sur son appréhension. Pour eux, graphiquement, l'infini n'étant pas une valeur non définie, ils ont cherché à connaitre la valeur réelle à attribuer à l'infini.

4.2.2. Cas de désagrégation des limites de constituants de fonction rationnelle

Ici, il y a séparation ou décomposition des graphiques dont les constituants sont des fonctions placées sous forme de rapport, il revient aux étudiants de calculer le rapport de deux valeurs de limites, qui constitue la valeur de la limite cherchée.

4.2.2.1 . Cas de limite en une valeur finie

Concernant les courbes définies de l'exercice 5, une moyenne de 96,7 % a échoué. Par contre, 2,3 % d'étudiants ont trouvé la vraie valeur du rapport des limites des fonctions représentées respectivement par différentes courbes données. Dans l'ensemble, 12,6 % d'étudiants ont effectué des transformations de différentes courbes en équations algébriques. Aux termes de leurs transformations,1,7% ont calculé, de manière générale, les limites de chacune des composantes transformées et établi le rapport de ces limites comme limite finale. Cette technique a été très satisfaisante pour l'exercice 5.a et moins plausible pour la suite de 5 autres exercices renfermant les fonctions du second degré. A titre d'illustration, les deux courbes juxtaposées de l'exercice 5.a ont été transformées respectivement en équations $y= 3X-12$ et $Y= 2X-8$. Par ailleurs, aucun n'étudiant n'a pu penser au calcul de coefficient directeur des droites obtenues, qui serait le nombre dérivé.

S'agissant de ces transformations, les étudiants se sont appuyés sur les pôles (les racines ou coordonnées à l'origine) des courbes représentées sous forme des droites. Ils ont éprouvé des difficultés sur les courbes du second degré définies à l'exercice 5, par le fait qu'ils n'ont pas pu exploiter les coordonnées à l'origine, en vue de déterminer les fonctions du second degré.

Partant de discours des étudiants, intuitivement, nous avons remarqué qu'ils ont constaté l'existence de l'indétermination des limites de fonctions, dont la levée est restée incontournable pour nombreux d'entre eux. Par ailleurs, Ceux qui n'ont pas constaté l'indétermination, ils ont considéré comme limite, la valeur de l'ordonnée située à l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnés.

4.2.2.2. Cas de limite à l'infini

Dans le cas de limite à l'infini des fonctions rationnelles désagrégées de l'exercice 6, en moyenne, 96,1 % d'étudiants ont échoué, 3,7 % ont réussi et 0,2 % n'a pas travaillé. Ceux qui ont satisfait, pour la plupart, ont orienté leur réflexion sur la transformation des courbes d'exercices 6 en équations algébriques. Dans ce contexte, ils ont pu déterminer le rapport des limites des fonctions désagrégées. Quelques difficultés sus-évoquées, dans le cadre de calcul de limite à valeur finie, sont récurrentes. Il s'agit, par exemple, de la transformation en registre algébrique des courbes du second degré définies en registre graphique, partant des coordonnées de pôles.

Par ailleurs, nombre d'étudiants qui ont échoué lors de calculs des limites de ces fonctions, leurs réalisations s'illustrent par des difficultés liées à l'absence des données chiffrées ou de la donnée algébrique ou fonctionnelle, au sens et à l'estimation de la valeur de l'infini. Les apprenants estiment que, graphiquement, l'infini est la valeur qui se trouve à l'extrémité de chaque axe des coordonnées. Pour les autres, l'infini étant une valeur indéfinie ou illimitée. Cette conception erronée, aboutit à considérer la limite comme *un point d'arrêt ou borne infranchissable* (Cornu,1983).

En effet, lors de la présentation de l'ensemble des Réels IR, la place qu'occupe l'infini sur l'axe des Réels, influe sur son appréhension, étant donné que le graphique ne couvre pas à la fois l'intégralité de la fonction. La récurrence des difficultés relevées en mode assortiment pour les limites à l'infini est observée dans le mode de désagrégation.

5. Une prise en compte des praxéologies latentes dans le contexte géométrique

Les résultats de deux phases d'assortiment et de désagrégation des limites de fonctions rationnelles retenues dans cette étude, ont relevé l'impertinence de praxéologies développées. L'entrevue réalisée avec certains étudiants indique que la levée d'indétermination dans le registre graphique n'a pas été mise à profit dans leur cursus. Elle s'explique par le fait que les organisations mathématiques des manuels utilisés et de leurs enseignants se focalisent plus autour d'une seule technique qui est la règle de l'Hospital, et sont restées insatisfaisantes dans le registre graphique.

Pour la prise en compte des praxéologies latentes, nous avons repris des situations dont l'objectif principal consistait à amener les étudiants à développer des praxéologies permettant la levée d'indétermination dans le registre graphique. 35 étudiants parmi ceux qui ont échoué aux essais de la deuxième phase, ont été retenus pour les refaire. Cet échantillon est retenu pour une bonne prise en charge des apprenants, dont les lacunes sont approuvées.

Dans cette phase d'étude, quelques technologies ont été mise en pratique, notamment la technologie d'infiniment petit définissant la dérivée en un point de la courbe comme étant le coefficient directeur de la tangente en ce point de la courbe. Aussi, la notion d'approximation dans le cadre de voisinage d'un nombre constitue une autre technologie mise en jeu lors de calcul des limites de fonctions dans le registre graphique.

Pour le graphique représentant une droite, la $\lim_{x\to a} f(x) = k$ est déterminée par le calcul de l'ordonné rattaché aux valeurs proches de la tendance de la limite et constitue la vraie valeur de la limite cherchée. Une deuxième technique a consisté à la détermination de coefficient directeur défini par $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ qui correspond à la dérivée de la fonction représentant la courbe en un point de cette courbe. Ici, deux points ont été pris sur la droite, en vue de localiser leurs correspondants sur un segment parallèle à l'axe des abscisses, en suite déterminer la variation de la valeur de y lorsque x augmente d'une unité. Graphiquement, elle exprime la variation verticale de la droite pour un déplacement horizontal d'une unité positive.

Par ailleurs, pour le graphique représentant deux droites, les deux techniques précédentes sont d'application. Toutefois, la détermination des points de coordonnées à l'origine des axes tels que A(a,0), B(0,b), ont aussi permis de déterminer l'équation de la droite passant par deux points ($Y-Y_0= \frac{y2-y1}{X2-X1}$ $(x-x_0)$ en ces termes $Y-0 = \frac{b-0}{0-a}$ (x-0). Cette équation devient $Y= \frac{-b}{a}$ x.

A propos des graphiques représentant des paraboles qui sont des équations du second degré, la même technique est de rigueur. L'équation du second degré à déterminer, c'est celle qui passe par deux points des intersections de la courbe avec les axes.

Cette séance a répondu à la question : comment lever l'indétermination des fonctions rationnelles dont les constituants sont désagrégés dans le graphique en articulant les différentes représentations associées aux différents registres numériques, graphique, géométrique, algébrique et analytique ?

Dans cette phase d'étude, les capacités des étudiants ont été renforcées, en rapport avec les praxéologies latentes dans le registre graphique. Cette mise en pratique a intégré la règle de l'Hospital dans son contexte géométrique, qui consiste à calculer graphiquement, la dérivée de chacune des fonctions. En d'autres termes, la séance a amené les apprenants à la découverte de l'indétermination des limites dans le registre graphique, et au calcul du nombre dérivé en la valeur de la tendance. Ce dernier passe par le calcul du taux d'accroissement.

6. Discussion

Les essais réalisés dans cette étude ont mis en évidence les limites des praxéologies mathématiques appliquées dans le calcul des limites de fonctions dans le registre graphique. Il convient de constater que la levée des indéterminations dans le cas de désagrégation des limites de fonctions rationnelles représentées graphiquement par leurs courbes respectives, reste une situation dont les praxéologies mathématiques appliquées par les étudiants semblent être insatisfaisantes et non rassurantes. La focalisation des praxéologies rattachées au registre algébrique restreint le travail. Cela rejoint l'idée de Belhaj.F(2022) qui a évoqué le concept de *saut conceptuel* et celle de Thomas Lecorre (2016) qui a illustré des cas paradigmatiques de la notion de limite, parmi les obstacles épistémologiques de la notion des limites. Il est impérieux d'intégrer les technologies de la géométrie pour l'efficacité du travail.
Dans le contexte d'étude, il est vraisemblablement difficile d'admettre l'équivalence des graphiques de deux fonctions définies par la technologie de désagrégation des limites. Par conséquent, les résultats des apprenants n'ont pas dégagé l'égalité définie par la technologie $\lim\limits_{a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{a} f(x)}{\lim\limits_{a} g(x)}$,d'autant plus que les différents résultats trouvés diffèrent selon le mode de représentation sémiotique.
En rapport avec le point de vue cinématique de R. Bkouche (1996), la propension de considérer la limite d'une fonction en un point d'abscisse donné, rattaché à son ordonné, en établissant une relation entre les variables indépendantes et dépendantes, ne constitue pas un atout praxéologique majeur dans le registre graphique pour lever l'indétermination d'une limite. Dans cette optique, il y a une forte probabilité de vivre les faits épistémologiques stigmatisés par Cornu (1983).

Partant du principe que la limite en un point d'une fonction et la valeur de la fonction en ce même point peuvent être différentes, il convient de noter que l'interprétation de limite en un point dans le registre graphique permet de déterminer une valeur approchée d'une limite, mais pas toujours sa valeur exacte. C'est pour dire que la levée d'indétermination d'une limite dans le registre graphique nécessite un apport considérable de la notion d'approximation. Dans cette optique, il est impérieux de considérer aussi bien des valeurs inférieures que des valeurs supérieures.

Dans le cas de la limite à l'infini des fonctions suivant le mode de désagrégation, il est vrai que le graphique ne couvre pas à la fois le domaine de définition de la fonction, le sens accordé à l'infini constitue un atout majeur pour la détermination approximative de la vraie valeur de la limite. Cette façon de travailler permettra de surmonter la *problématique d'approximation,* définie par Lê Thai (2007), comme l'un des obstacles épistémologiques de calcul de limite des fonctions. Par ailleurs, l'existence de la forme asymptotique de certaines courbes met en mal l'apprenant qui s'affectionne à l'application du fameux principe selon lequel, c'est *la variable qui tire la fonction.*

Dans le mode de désagrégation, au regard de représentations sémiotiques de ces fonctions et de techniques appliquées, nous estimons que ces étudiants n'ont pas su qu'ils ont été en face d'une indétermination des limites des fonctions. Devant ces situations, les étudiants auraient pu calculer le coefficient directeur de chaque droite, qui correspond au nombre dérivé de la fonction représentant la courbe.
En se référant au point de vue opératoire, le rangement a consisté en la détermination de l'expression algébrique de la fonction, en vue de procéder au remplacement par la tendance. Par la suite, il faudra déterminer le coefficient angulaire ou la pente de la fonction. Dans ce cas, le passage du graphique au fonctionnel révèle des *micrro-ruptures d'ordre conceptuel et technique* (Praslon,2000), rendant ardue, l'exécution de la tâche, surtout pour les fonctions non affines et non linéaires.

7. Conclusion

Les essais que nous avons menés dans ce travail se placent dans le contexte de l'enseignement et apprentissage en RDC. Il ressort de ces essais qu'en rapport avec la technologie rattachée à la limite des fonctions rationnelles, définie par $\lim_{a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{a} f(x)}{\lim_{a} g(x)}$, pour deux fonctions numériques f et g, les praxéologies mathématiques développées par les apprenants étant, en majeur partie, limitées et insatisfaisantes dans le registre graphique. La confrontation de résultats obtenus dans les deux différents registres d'étude dénote, dans le cas d'indétermination des limites dans le registre graphique, la non évidence de la technologie $lim_{a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{lim_{a} f(x)}{lim_{a} g(x)}$, pour deux fonctions numériques f et g, et a un réel.

Par conséquent, il a été révélé que la tendance de variable, la notion de voisinage, l'estimation, la précision, l'approximation, le registre de représentation sémiotique et tant d'autres types de calculs influencent l'égalité de deux membres de la technologie sus-évoquée lors de la levée d'indétermination dans le registre graphique.

Références bibliographiques

1) Badetty Loshima et al, (2022), *MATRISER LES MATHS 3*, Edition LOYOLA ;

2) Belhaj. F. (2022). *Enseignement et apprentissage des approximations locales des fonctions au début du cursus dans le Supérieur - Cas des classes préparatoires aux études d'ingénieurs*, Thèse de Doctorat Université de Pau et des Pays de l'Adour – UMR CNRS 5142 ;

3) Bkouche. F. (1996). Point de vue sur l'enseignement de l'analyse : des limites et de la continuité dans l'enseignement – repères – IREM 24 ; p. 67-76. Pont- à – Mousson ;

4) Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université Savoirs, Connaissances et conditions relatives à la validation*, Thèse de doctorat. Université Bordeaux 1 p.200) ;

5) Bosch. M et Gascon J. (2002), *Organiser l'étude.2.Théorie et empiries* ; in Actes de la XIème Ecole d'été de Didactique de Mathématiques 2002 ;

6) Chevallard, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques ; l'approche anthropologique*. *Actes de l'UE de la Rochelle*, 91-118 ;

7) Chevallard, Y. (2017), *La TAD et son devenir : rappels, reprises et avancées.* In G. Cirade et al. (Eds), Evolutions contemporaines du rapport au mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société (pp.27-65) ;

8) Cornu. B (1983). Apprentissage de la notion de limite. Conceptions et obstacles. IREM. Grenoble ;

9) Duval(1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, 37-65 ;

10) Lê Thai, B. (2012). *Notion de limite et décimalisation des nombres réels. Le cas de l'enseigne-ment Secondaire au Viêt Nam*. Petit x, 33-50 ;

11) Mwanza Kamuanga (2020). *L'enseignement de la dérivée dans le processus d'apprentissage en 3ème des humanités de la République Démocratique du Congo*, In International journal of Innovation and Applied et studies, ISSN 2028-9324 vol. 29 No. 2 May 2020, pp.298-311, 2020 Innovative Space of scientific Research Journals ;

12) Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S/DEUG Sciences en analyse : Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Publications mathématiques et informatiques de Rennes, (3), 1-27 ;

13) Sterpinska, A. (1985). *Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.6.1. Edition La pensée Sauvage ;

14) Thomas Lecorre (2016) : *Des conditions d'une ingénierie relative à la définition de la notion de limite : Elaboration d'un cadre sur un modèle de rationalité pour l'accès au objets mathématiques complexes.* Education. Université Grenoble Alpes ;

15) Wane Mundoni, B. (2020). Analyse didactique des rapports institutionnel et personnel aux Problèmes iatromathématiques afférant au taux d'intérêt, Thèse de Doctorat. Université Pédagogique Nationale, RDC ;

16) Wane Mundoni, B. (2022). *Notes de cours d'analyse mathématique pour les étudiants de la pré-Licence,* Institut Supérieur d'Architecture et d'Urbanisme (ISAU-Gombe). Kinshasa-RDC.